

Des différentes incertitudes et de leurs modélisations: Aspects mathématiques



Éric PARENT, ingénieur en chef des ponts, des eaux et forêts
Equipe MOdélisation, Risque, Statistique, Environnement de l'UMR MIA 518
INRA/AgroParisTech (Math. Info. App. 518)

Mardi 13 Juin 2012

INCERTITUDES ET ADAPTATION AU CHANGEMENT CLIMATIQUE
GIS Climat-Environnement-Société, Association NSS-Dialogues
Ministère de l'écologie, du développement durable et de l'énergie (programme GICC)
Espace Isadora Duncan, CNRS Délégation Nord et Ouest, Meudon

Plan

- Deux paradigmes probabilistes de l'incertitude
- Passerelles mathématiques
 - 1. De la probabilité prédictive à la conception fréquentiste : l'échangeabilité et l'apprentissage
 - 2. De la probabilité fréquentielle à la conception bayésienne : la décision
- Challenges en situation de changement
 - L'hypothèse et la communauté
 - Causalité et conditionnement
 - Stationnarité

DEUX PARADIGMES



Rappel math: qu'est une *Probabilité*?

- Essentiellement, un opérateur \Pr d'un ensemble de parties d'un ensemble (stable par les opérations ensemblistes) vers l'intervalle $[0,1]$ qui obéisse aux **règles** fondamentales :
 - $\Pr(A) \geq 0$
 - $\Pr(E) = 1$
 - $\Pr(A) + \Pr(B) = \Pr(A \cup B)$ si A et B disjoints

- Dans le cas de cardinal d'événements infini, dénombrable ou non, la définition doit être adaptée (cf. convergence des séries ou de l'intégrale en théorie de la mesure)

Deux interprétations concrètes

- *...the limiting fraction of positive outcomes in a repetitive experiment : Jacques Bernoulli (1654-1705),*
- *The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the chance of the thing expected upon it's happening : Thomas Bayes (1702-1761),*

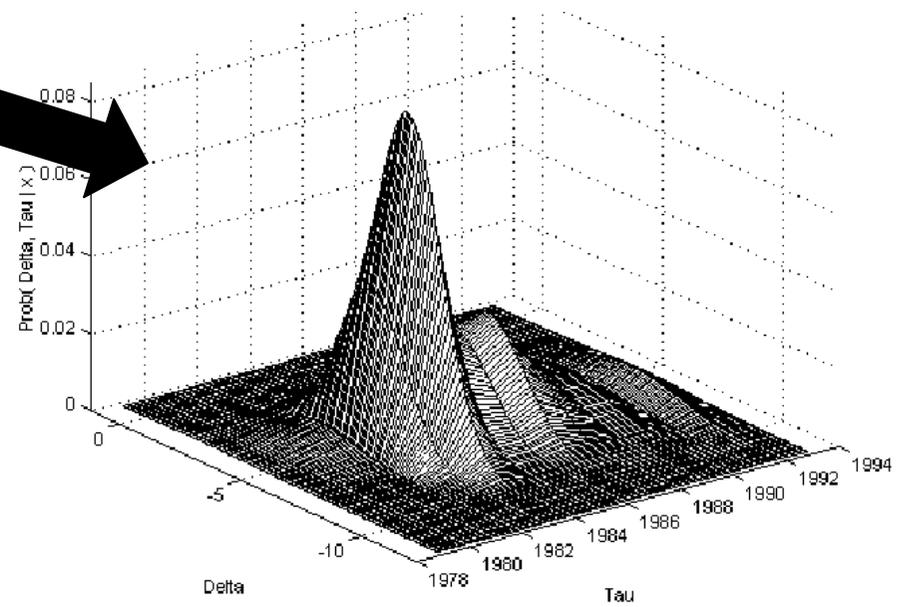
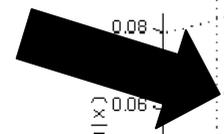
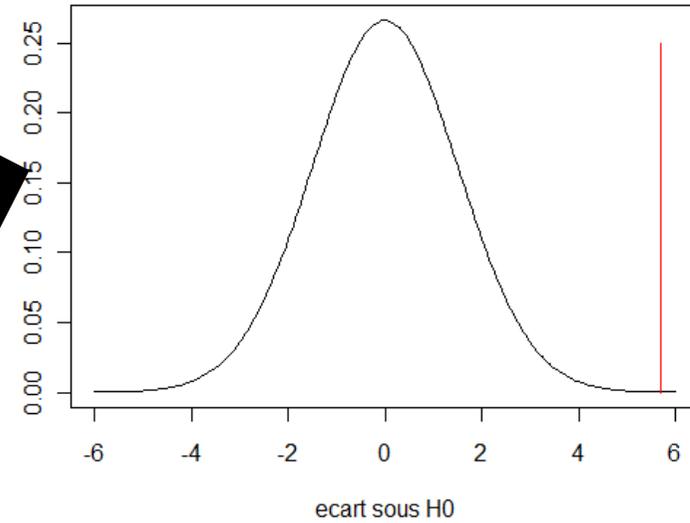
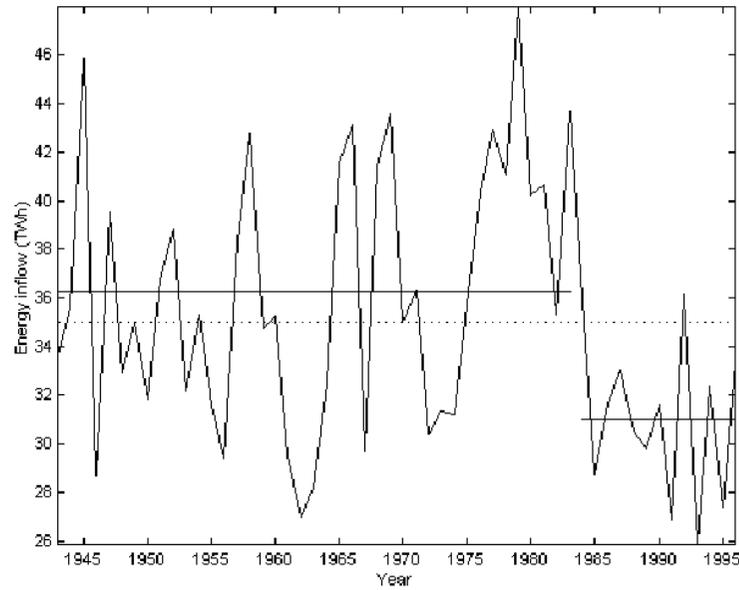
Deux paradigmes

- **Incertitude = qualité intrinsèque**
La limite du rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles
probabilité objective, unique
la répétabilité et les observables
- **Incertitude = expression d'une interprétation**
On appelle $Pr(A)$ le prix que **Vous** êtes disposé à payer ou à vendre un pari qui rapporte : 1 euro si l'événement A se produit, 0 sinon.
probabilité subjective, personnelle, conditionnelle
le pari et les inconnues

Deux paradigmes:
Etes vous un bayésien qui s'ignore?

| | Fréquentiste | Bayésien |
|-----------------------------------|--|--|
| Intervalle de confiance | Fiabilité de la procédure d'estimation | Jugement probabiliste direct |
| Étude d'hypothèses en concurrence | Raisonnement par l'absurde. Dissymétrie | Incertitude totale Modèles en parallèle |

Détection de rupture
Production hydro-electrique de Churchill falls

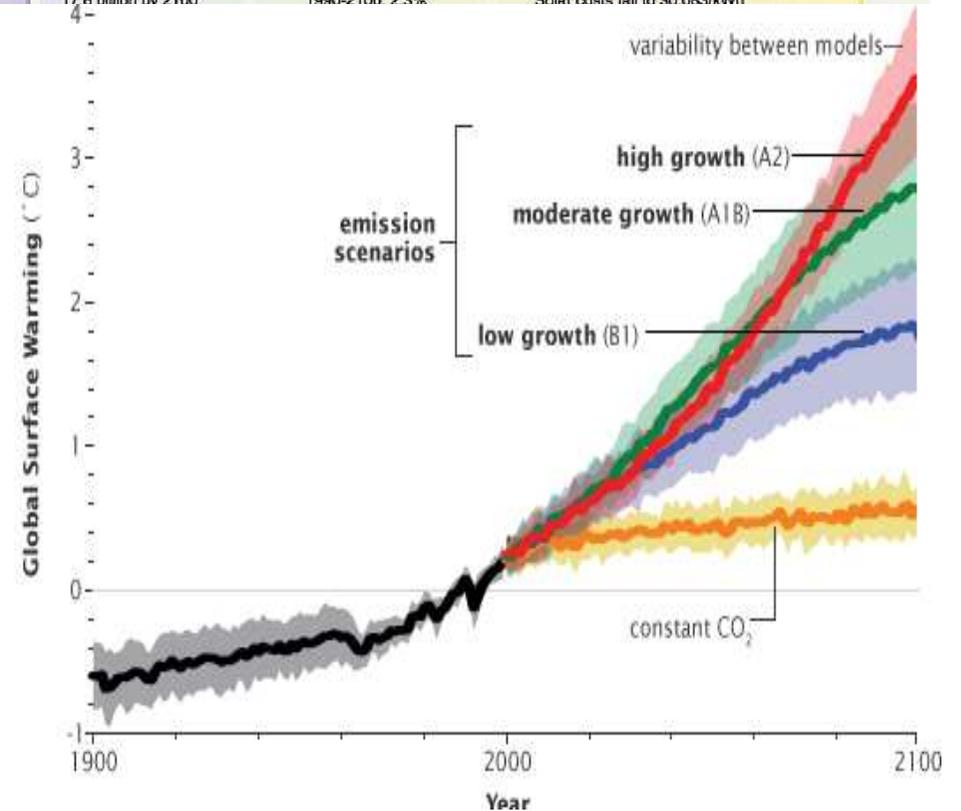
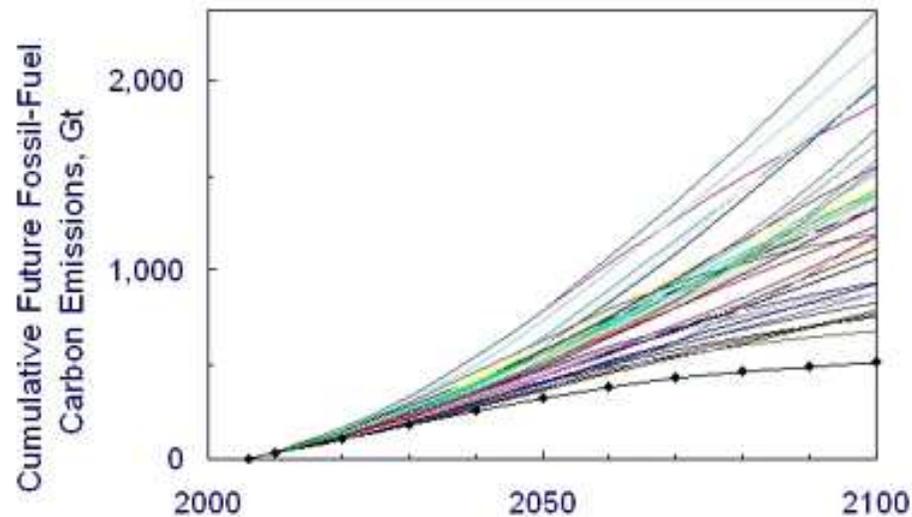


Les scénarios IPCC

Horizon 2100:

- entre $+2^{\circ}\text{C}$ et $+4$ selon scénario
- entre 550 et 850 ppm CO_2

| Scenario | Population | Economic growth | Energy supplies |
|----------|---|------------------------------------|---|
| IS92a,b | World Bank 1991 11.3 billion by 2100 | 1990-2025: 2.9% 1990-2100: 2.3% | 12,000 EJ conventional oil 13,000 EJ natural gas Solar costs fall to \$0,075/kWh 191 EJ of biofuels available at \$70/barrel |
| IS92c | UN medium-low case 6.4 billion by 2100 | 1990-2025: 2.0% 1990-2100: 1.2% | 8,000 EJ conventional oil 7,900 EJ natural gas Nuclear costs decline by 0.4% annually |
| IS92d | UN medium-low case 6.4 billion by 2100 | 1990-2025: 2.7% 1990-2100: 2.0% | Oil and gas same as IS92c Solar costs fall to \$0.065/kWh 272 EJ of biofuels available at \$50/barrel |
| IS92e | World Bank 1991 11.3 billion by 2100 | 1990-2025: 3.5% 1990-2100: 3.0% | 18,400 EJ conventional oil Gas same as IS92a,b Phase out nuclear by 2075 |
| IS92f | UN medium-high case 17.6 billion by 2100 | 1990-2025: 2.9% 1990-2100: 2.3% | Oil and gas same as IS92e Solar costs fall to \$0.083/kWh |



The theory that would not die...

- I am not a believer ..., Dennis (1996)
- Bayesian statistics is not a *branch* of statistics, it is a way of looking at the whole of statistics, Lindley (1971)
- ...Bayesian statistics is difficult in the sense that thinking is difficult, Berry (1997)

DE LA PROBABILITÉ PERSONNELLE À LA CONSTRUCTION FRÉQUENTISTE

L'échangeabilité

De Kolmogorov à De Finetti

1. De l'épistémique au fréquentiel

Quelques données de contrôle qualité....

111110111011111111011110111111011111111101111 ?

000001000100100011000100001100000 ?

La notion clé

- Rappel :

les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ sont **échangeables** si pour tout n , la loi conjointe est invariante par permutation des variables.

La probabilité prédictive

sur observations binaires $Y=1$ (succès) ou $Y=0$ (échecs):
Pourquoi les 3 séquences sont elles de natures différentes?

- 1 0 1 1 1 1 1 ? Jeu de pile ou face avec pièce équilibrée
- 1 0 1 1 1 1 1 ? Contrôle de la qualité dans une usine :
une seule pièce correcte sur sept
échantillonnées
- 1 0 1 1 1 1 1 ? Naissance attendue dans une famille
avec six garçons et une fille

Théorèmes de Représentation

- Definetti(1937) puis Hewitt-Savage (1955):

Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n à valeur dans \mathfrak{X} sont échangeables, si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur l'ensemble des lois de probabilités $P(\mathfrak{X})$ sur \mathfrak{X} , telle que

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \int Q(A_1) \dots Q(A_n) \mu(dQ)$$

De plus la limite de la fonction de répartition empirique des X_1, X_2, \dots, X_n est une réalisation de μ

1. Du bayésien au fréquentiste

- L'échangeabilité cache une indépendance conditionnelle
- Sans conceptualisation épistémique, pas d'apprentissage
- Existence mathématique du prior et du modèle classique sous des hypothèses *type de raison suffisante* sur les données

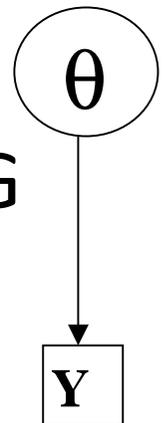
$$[Y] = \int_{\theta} [Y|\theta] \times [\theta] d\theta$$

Diagram illustrating the equation $[Y] = \int_{\theta} [Y|\theta] \times [\theta] d\theta$ with annotations:

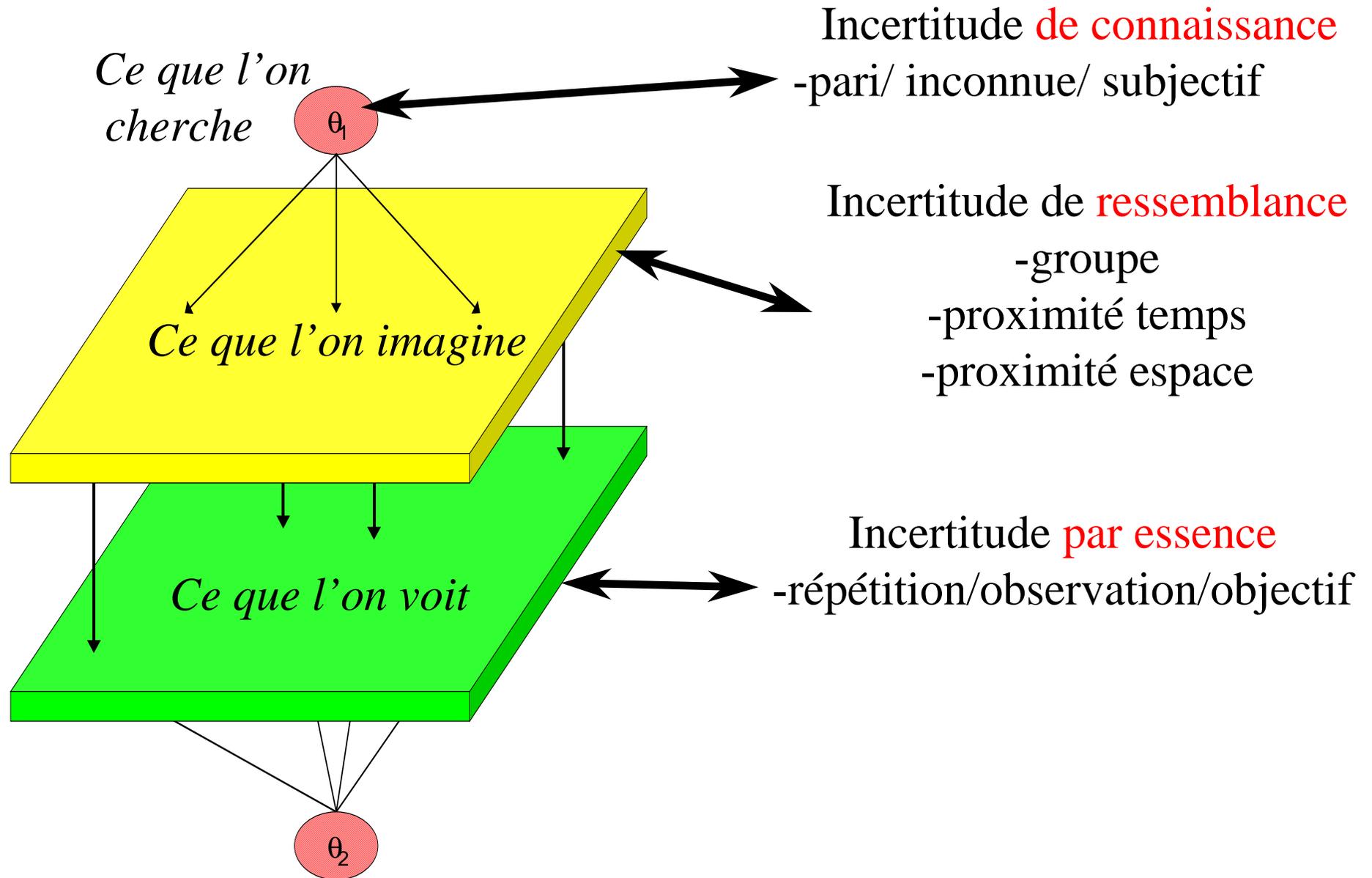
- predictive** (red text) points to $[Y|\theta]$
- prior** (red text) points to $[\theta]$
- vraisemblance** (red text) points to the integral symbol \int

Le jugement probabiliste ordinaire

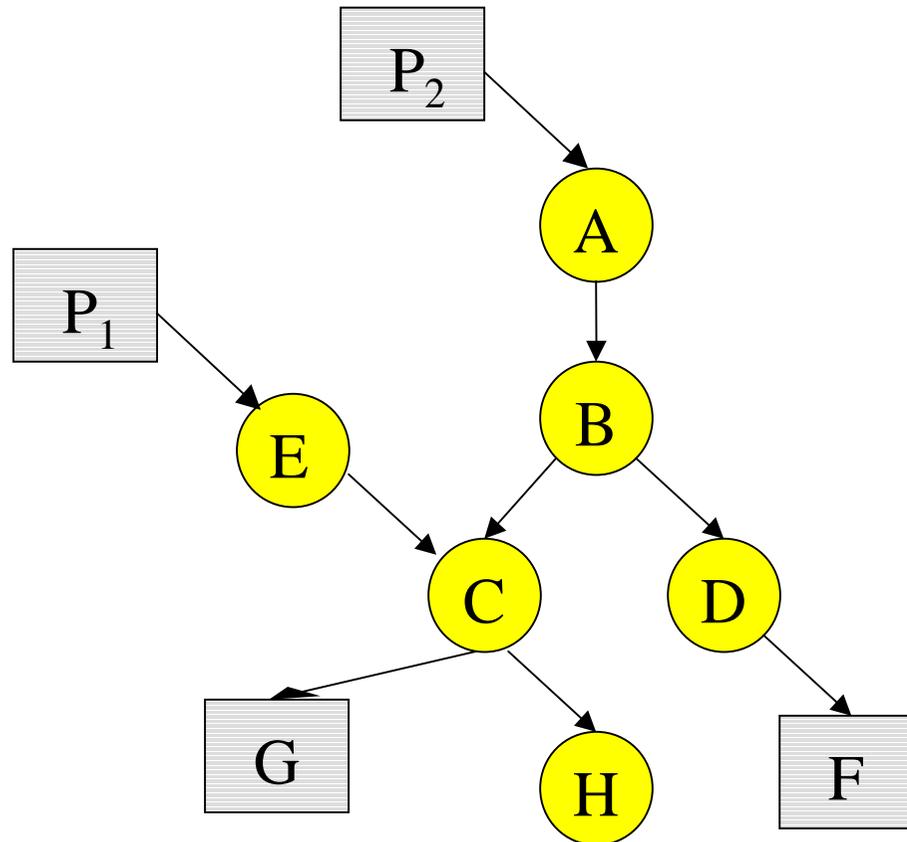
- observations binaires: 1 0 1 1 1 1 1 ?
Prédictive=pari probabiliste naturel
- L'expertise, codée par le prior, est équivalente à un jeu de données virtuelles
- La probabilité est conditionnelle
- Indépendance ou indépendance conditionnelle
- Faire apparaître le conditionnement => DAG



Les situations d'information incomplète



Qu'est-ce que la vision statistique?

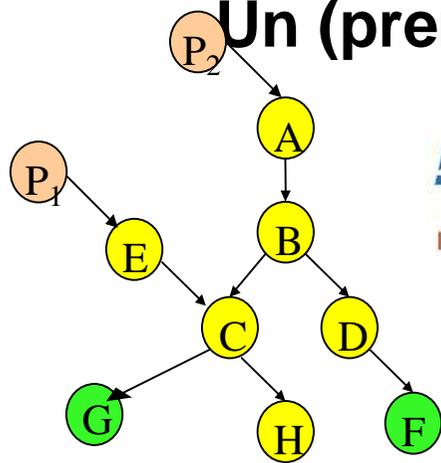


Chercher la loi CONDITIONNELLE (jointe) de certains nœuds sachant d'autres nœuds

Inférence = apprentissage statistique via les probabilités conditionnelles

Une connaissance (prior ou observation) « bloque » un nœud

Un (premier) pas vers la modélisation (hiérarchique)



1818 Library Street, Suite 600
Reston, Virginia 20190
703 787 8700 www.metsci.com



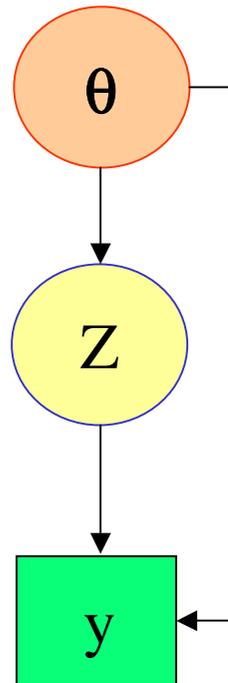
Modéliser : Conditionner par morceaux pour traduire la complexité

Paramètres, Etats du processus et mécanismes d'Observation sont modélisés indépendemment

Probabilités de détection et d'occurrence

Où se trouve vraiment l'avion

Les indices que l'on a observés



$[\theta]$ Paramètres

$[Z|\theta]$ Z: Process Latent
Ressemblance

Individus, populations, temps, espace

$[y|Z,\theta]$ Y: Observations

Rôle des variables latentes...

Modélisation
[effets|causes]

Recherche de l'Airbus AF447 (2009/06/01)

$[Y_i = 1|Z_i = 1] = p_i$ Probabilité de détection dans la case i

$\pi_i = [Z_i = 1]$ Probabilité d'occurrence dans la case i

$$[Z_i = 1|Y_i = 0] = \frac{[Y_i = 0|Z_i = 1][Z_i = 1]}{[Y_i = 0|Z_i = 0][Z_i = 0] + [Y_i = 0|Z_i = 1][Z_i = 1]}$$

$$= \frac{(1 - p_i)\pi_i}{1 - p_i\pi_i} < \pi_i$$

$$[Z_{j \neq i} = 1|Y_i = 0] = \frac{[Y_i = 0|Z_j = 1][Z_j = 1]}{[Y_i = 0]}$$

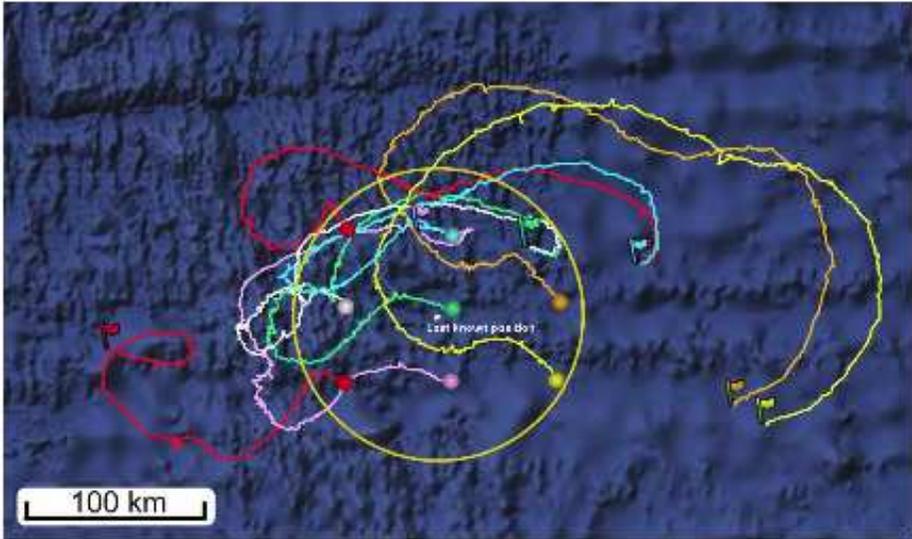
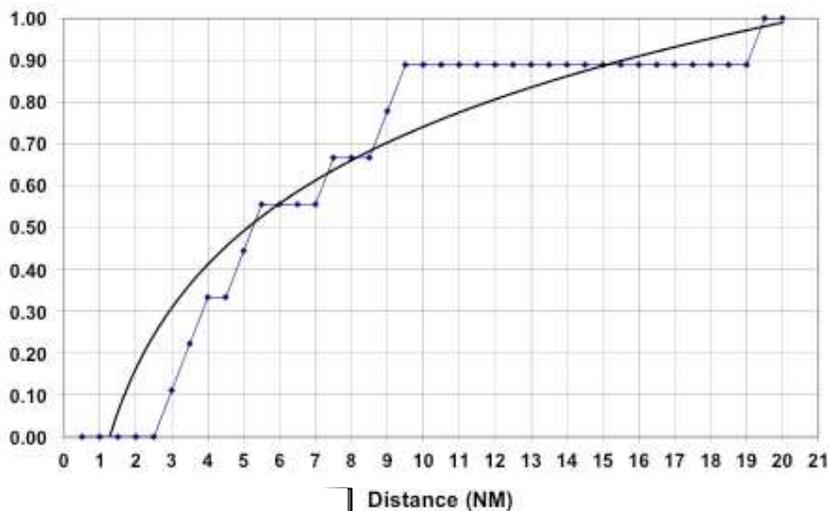
$$= \frac{\pi_j}{1 - p_i\pi_i} > \pi_j$$



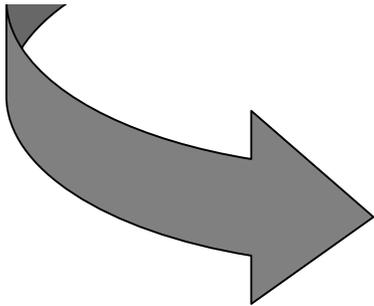
1818 Library Street, Suite 600
Reston, Virginia 20190
703 787 8700 · www.metsci.com

Search Analysis for the Location of the AF447 Underwater Wreckage. Report to Bureau d'Enquêtes et d'Analyses pour la sécurité de l'aviation civile. By L. D. Stone, C. Keller, T. L. Kratzke., J.Strumpfer. 20 January 2011

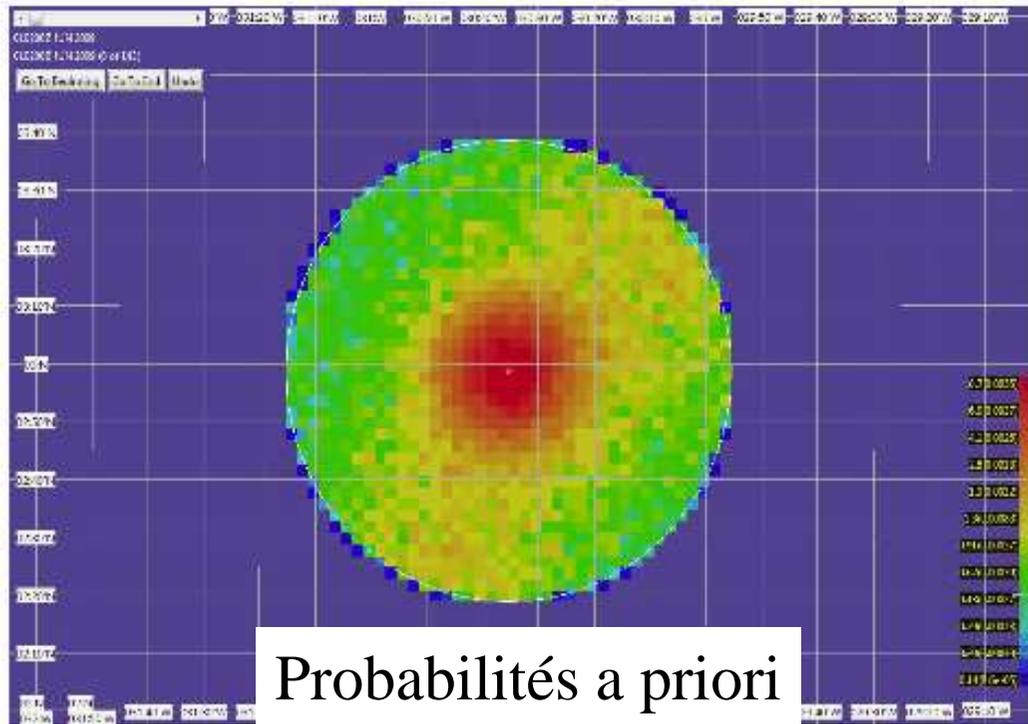
Prior pour l'Airbus AF447 disparu 1er juin 2009



cdf empirique
(9 accidents)

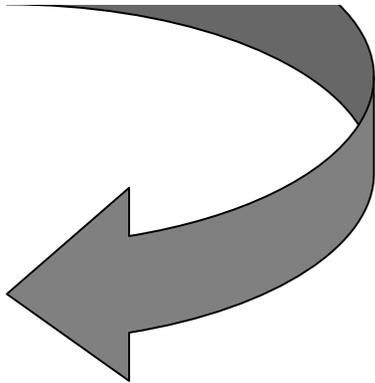


Distance (NM)



Probabilités a priori

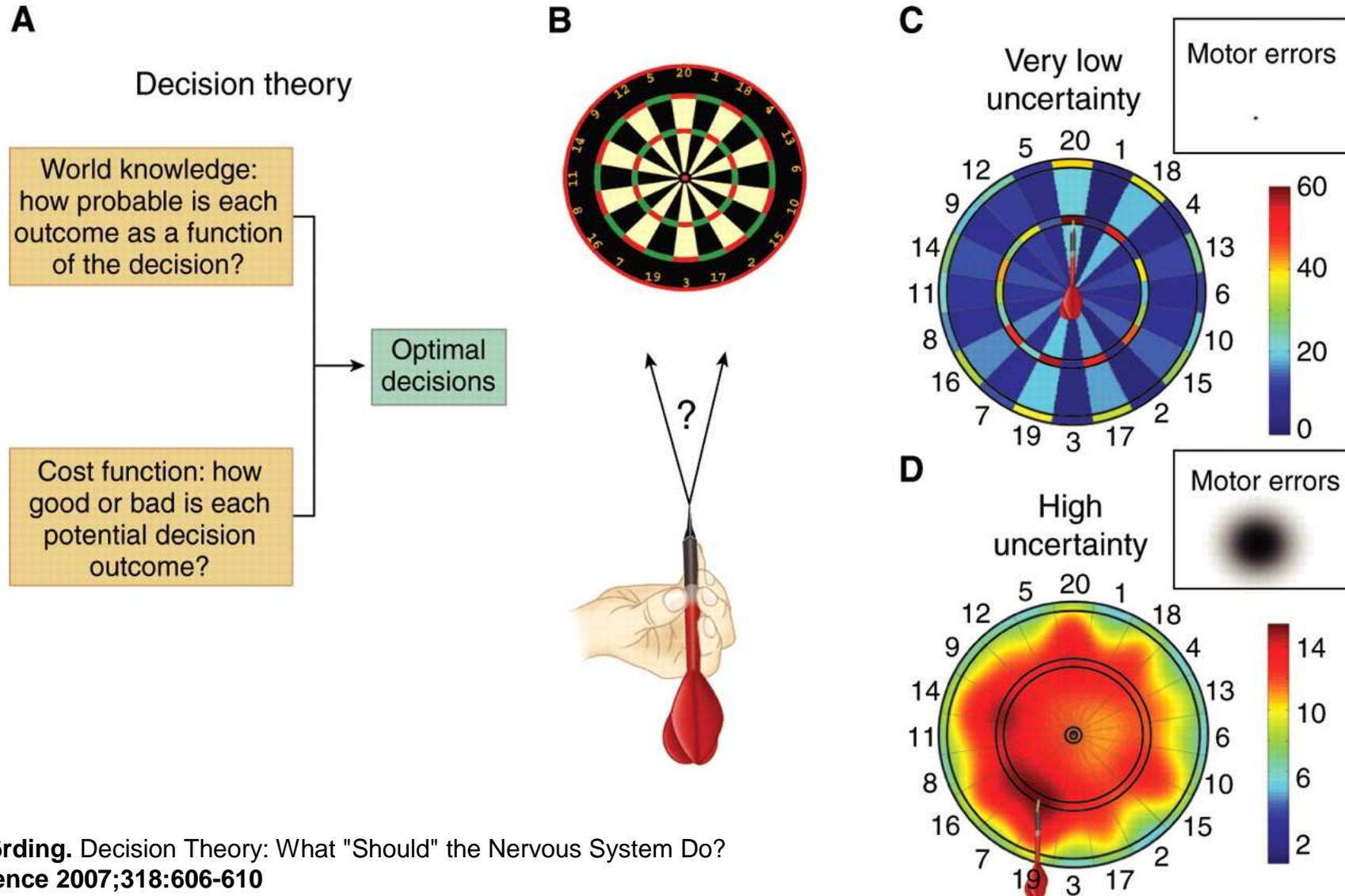
Reverse drift



DE LA PROBABILITÉ CONVENTIONNELLE À LA CONSTRUCTION BAYESIENNE

La décision en situation
d'information incomplète
De Wald à Savage

2. DU FRÉQUENTISTE AU BAYÉSIEN LE CADRE DÉCISIONNEL



2. DU FRÉQUENTISTE AU BAYÉSIEEN

LE CADRE DÉCISIONNEL GÉNÉRAL DE WALD

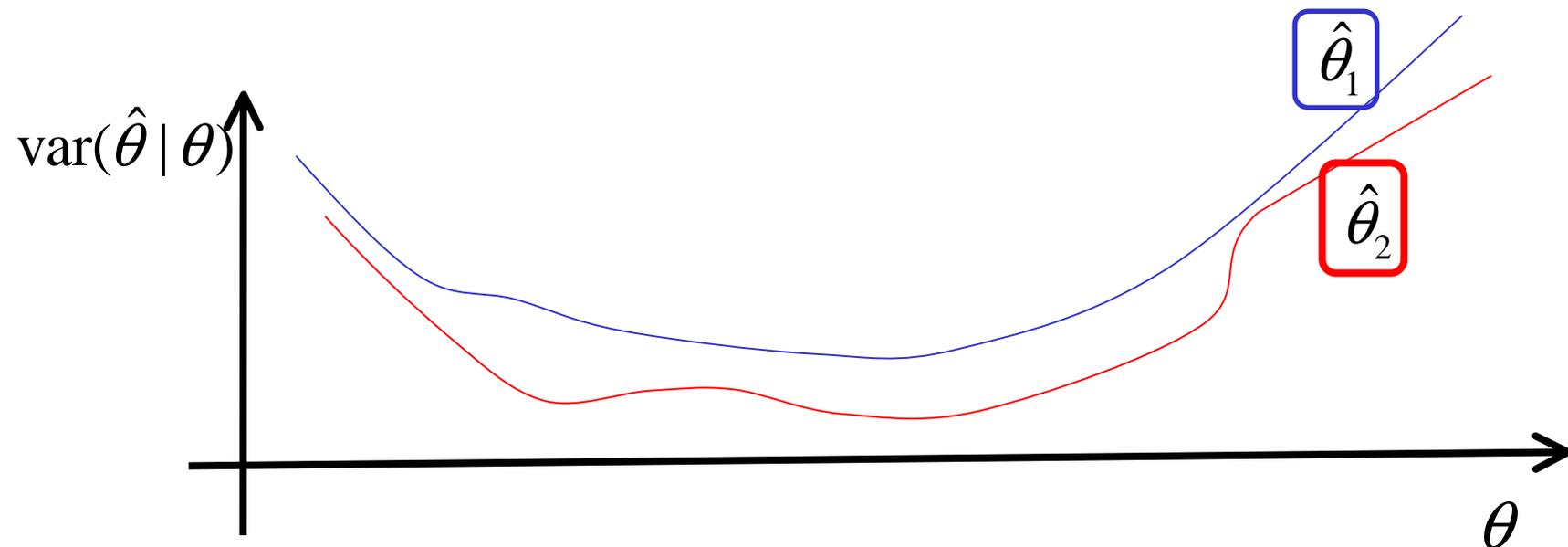
- Un ensemble de décisions $\{d\}$
- Des états de la nature $\{\theta\}$
- Une fonction de coût $W(d, \theta)$

- Une variable aléatoire fournissant des observations $Y | \theta$
- Une règle δ de décision $d = \delta(y)$
- Le risque $R(\delta, \theta) = \mathbf{E}(W(\delta(Y), \theta) | \theta)$
- Cas particulier de l'estimation : $d = \hat{\theta}$

2. DU FRÉQUENTISTE AU BAYÉSIEN

Règles admissibles

- Règle non dominée : il n 'existe pas d' autre règle **uniformément** meilleure



2. DU FRÉQUENTISTE AU BAYÉSIEEN

- Risque $R(\delta, \theta) = \mathbf{E}(W(\delta(Y), \theta) \mid \theta)$
- Le risque bayésien $R_\pi(\delta) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(W(\delta(Y), \theta)))$ la solution δ_π dépend du poids π mis sur θ

- Astuce mathématique? Théorème de la classe complète....
- Paradoxe de Stein...
- Interprétation
 $\pi(\theta) = [\theta]$

REPRESENTATION PROBABILISTE
des INCERTITUDES
Les CHALLENGES en SITUATION de C.C.

Un processus séquentiel de décision

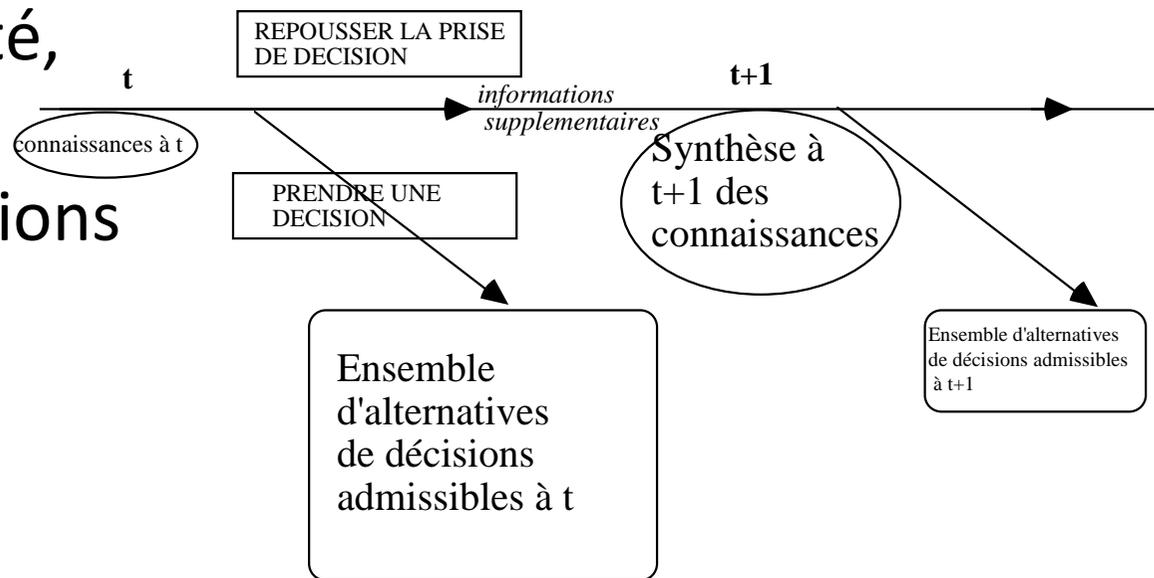
Conditionnement et représentation
de la causalité difficile.

Faire converger les jugements de la
communauté

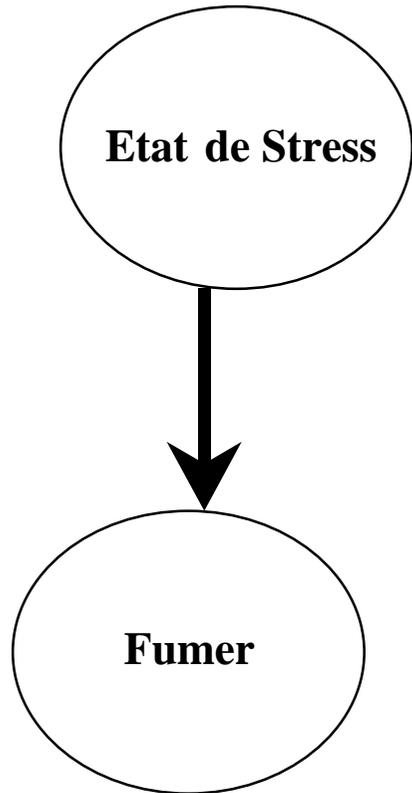
Les raccourcis cognitifs

CC et incertitudes:
Les 3 Challenges de la décision séquentielle selon Krzstofowicz

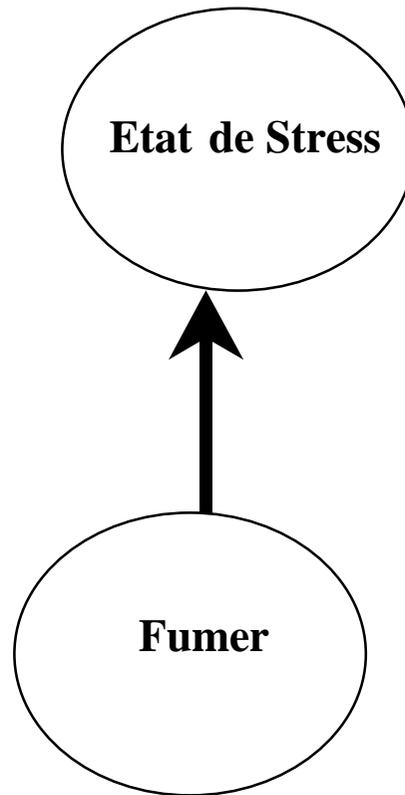
- Plus d'info, meilleure connaissance
- Pertes de flexibilité, Diminution du cardinal des décisions
- Irréversibilité



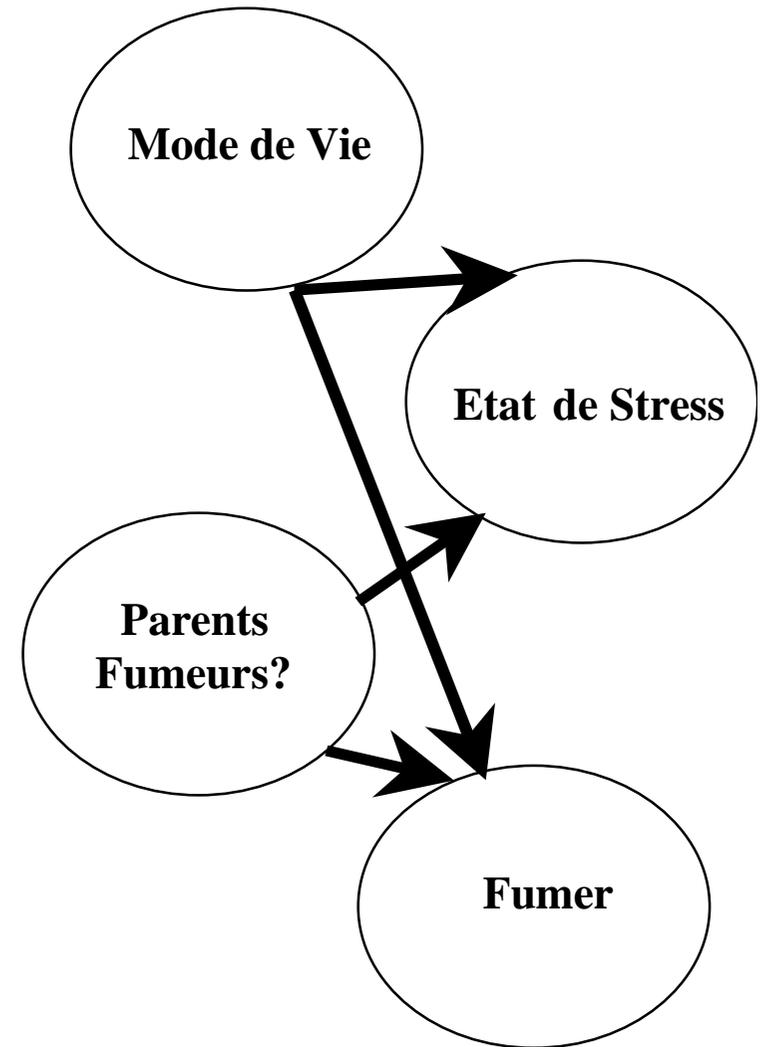
Causalité et dépendance probabiliste



Si je suis stressé,
il se peut
que je fume



Fumer peut
éventuellement
provoquer
un état de stress



Dans la rubrique "Opinions" du quotidien "le Figaro" du 15 décembre 1994, un certain Monsieur Paul Lambert donne le tableau suivant où NI représente le nombre d'immigrés supplémentaires depuis 1962 et NC, le nombre de chômeurs.

| Années | 1962 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1987 | 1989 |
|---------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| NI (milliers) | 111.8 | 322.5 | 1009 | 1710 | 3053 | 3920 | 3957 |
| NC (milliers) | | 3180 | 4960 | 6190 | 7840 | 8400 | 9020 |

∅ Tracer le graphe NI vs NC et calculer le coefficient de corrélation linéaire.

∅ L'auteur de l'article commente cette courbe dans les termes suivants :

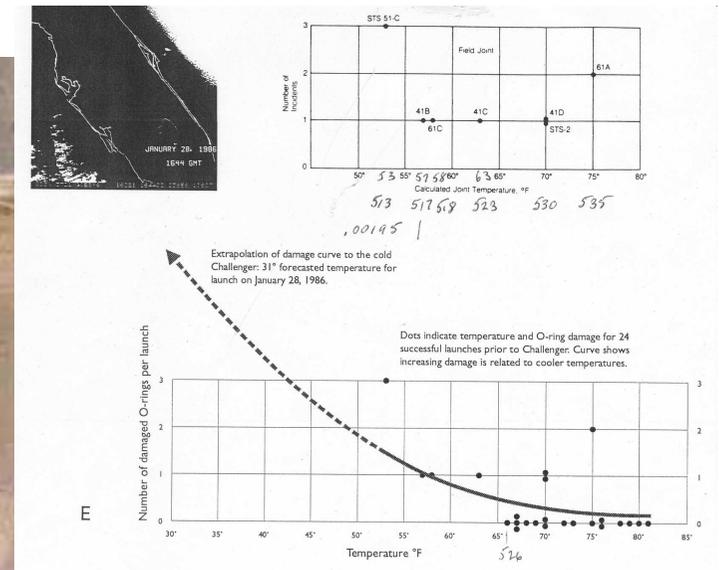
"...La pente de la droite médiane (0.78) tracée entre les points permet d'affirmer qu'un million d'immigrés en plus provoquent 780000 chômeurs de plus, que, à l'inverse, un million d'immigrés en moins produiraient 780000 chômeurs en moins et que six millions d'immigrés en moins nous ramèneraient à 500000 chômeurs : il s'agit là d'une certitude mathématique (sic)".

Expliquer pourquoi la statistique ne permet pas d'aboutir à une telle conclusion péremptoire, qui ne saurait d'ailleurs être affectée d'aucune « certitude mathématique ».

Bayesian reanalysis of the Challenger O-ring data.

Maranzano CJ, Krzysztofowicz R.

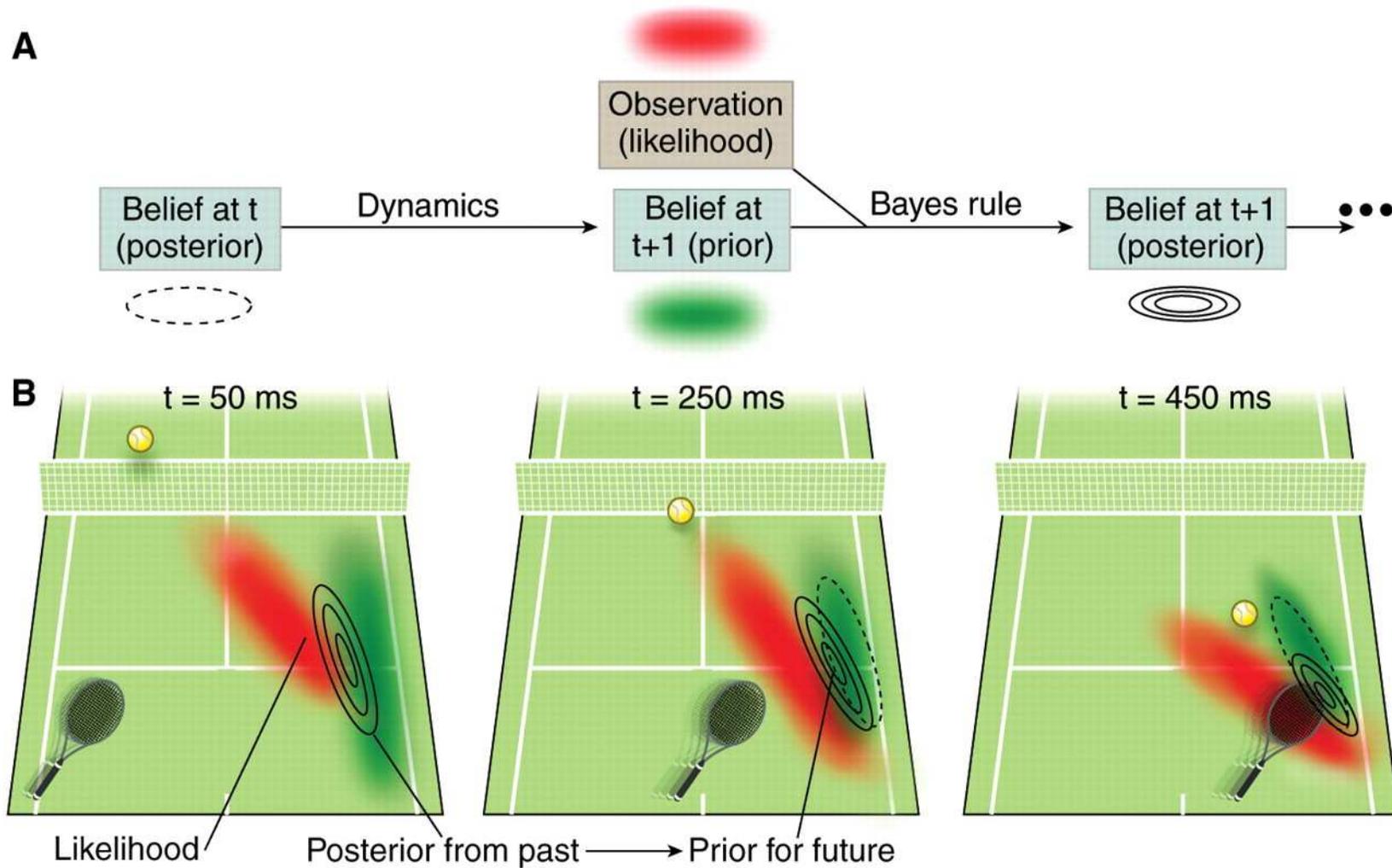
Risk Anal. 2008, 28(4):1053-67



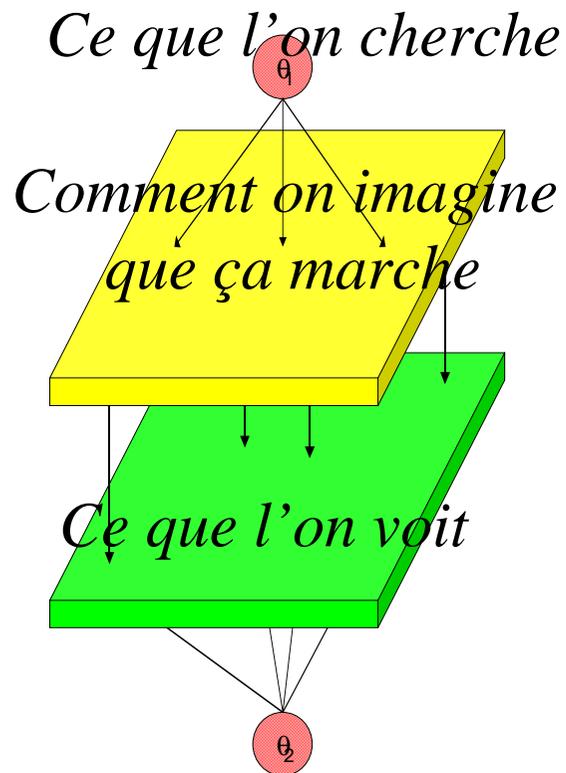
Challenger 28 janvier 1986.

- Descriptif, normatif, ou prescriptif
- Les raccourcis cognitifs
 - Allais,.. Kahneman & Tverski.
 - Massimo Piattelli Palmarini, La réforme du jugement ou comment ne plus se tromper, Paris, Éditions Odile Jacob, 1995
- Evolutionary psychology
 - K Körding. Decision Theory: What "Should" the Nervous System Do? Science 2007;318:606-610
- L'hypothèse des marqueurs somatiques
 - J-P. Changeux, l'Homme neuronal, Fayard 1983
 - A. Damasio: Descartes' Error: Emotion, Reason, and the Human Brain, Putnam Publishing, 1994

Evolutionary psychology



Conclusions



1. Des jugements personnels pondérant différemment les hypothèses finissent par converger quand l'information s'accroît : une situation asymptotique
2. Construire un ou des modèles statistiques, difficile en situation instationnaire.
3. Données observationnelles guère répétables. Pas de contrôle des conditions expérimentales
4. Inadaptation décisionnelle à un changement très rapide.
5. La communication du risque

Collection
Statistique
et probabilités
appliquées

Dirigée par
Yadolah Dodge

COMITÉ EDITORIAL :
Christian Genest
Université Laval, Québec

Marc Hallin
Université libre de Bruxelles,
Belgique

Ludovic Lebart
ENST, Paris

Stephan Morgenthaler
EPFL, Lausanne

Gilbert Saporta
CNAM, Paris

Éric Parent, Jacques Bernier

Raisonnement bayésien

Modélisation et inférence

Cette collection met à la disposition du public intéressé par la statistique (étudiants, enseignants, chercheurs) des ouvrages qui concilient effort pédagogique et travail permanent de mise à jour. Cette démarche implique de prendre en compte de façon sélective et critique les renouvellements des concepts, des champs d'application et des outils de traitement. Seules une compréhension profonde et une appropriation des connaissances permettent de s'adapter aux évolutions qui n'ont pas fini de bouleverser cette discipline.

ISBN : 978-2-287-33906-6
9 782287 339066
springer.com

Collection
Statistique
et probabilités
appliquées

É. Parent, J. Bernier

Raisonnement bayésien
Modélisation et inférence

Éric Parent, Jacques Bernier

Raisonnement bayésien

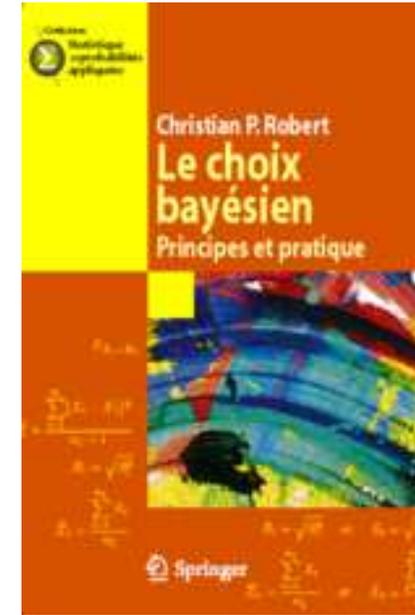
Modélisation et inférence

Cet ouvrage expose de façon détaillée la pratique de l'approche statistique bayésienne à l'aide de nombreux exemples choisis pour leur intérêt pédagogique. Il insiste particulièrement sur l'emploi du raisonnement conditionnel qui fonde la cohérence profonde des méthodes de la modélisation et de l'inférence statistique sous le paradigme bayésien.

La première partie donne les principes généraux de modélisation statistique permettant d'encadrer mais aussi de venir au secours de l'imagination de l'apprenti modélisateur. En examinant des exemples de difficulté croissante, le lecteur forge les clés pour construire son propre modèle. La seconde partie présente les algorithmes de calcul les plus utiles pour estimer les inconnues du modèle. Chaque méthode d'inférence est présentée et illustrée par de nombreux cas d'applications. Si nécessaire, un rappel de leur cadre théorique essentiel est présenté sans démonstration.

Le livre cherche ainsi à dégager les éléments clés de la statistique bayésienne, en faisant l'hypothèse que le lecteur possède les bases de la théorie des probabilités et s'est déjà trouvé confronté à des problèmes ordinaires d'analyse statistique classique. Il peut servir de support à un cours de modélisation ou de statistique appliquée dans un programme de Master ou d'École d'Ingénieurs. Il s'adresse également aux chercheurs et utilisateurs désireux de s'assurer de la pertinence des méthodes qu'ils emploient. Le débutant, au prix d'un investissement intellectuel acceptable, ainsi bien que le spécialiste, pourront y trouver les informations fondamentales pour comprendre et mettre en œuvre des modèles répondant à leurs besoins spécifiques.

VPP = $\frac{(P \times Ss)}{(P \times Ss) + [(1-P) \times (1-Sp)]}$
Springer



Collection
Statistique
et probabilités
appliquées

Dirigée par
Yadolah Dodge

COMITÉ EDITORIAL :
Christian Genest
Université Laval, Québec

Marc Hallin
Université libre de Bruxelles,
Belgique

Ludovic Lebart
Télécom ParisTech, Paris

Stephan Morgenthaler
EPFL, Lausanne

Gilbert Saporta
CNAM, Paris

Jean-Jacques Boreux,
Éric Parent, Jacques Bernier

Pratique du calcul bayésien

Cette collection met à la disposition du public intéressé par la statistique (étudiants, enseignants, chercheurs) des ouvrages qui concilient effort pédagogique et travail permanent de mise à jour. Cette démarche implique de prendre en compte de façon sélective et critique les renouvellements des concepts, des champs d'application et des outils de traitement. Seules une compréhension profonde et une appropriation des connaissances permettent de s'adapter aux évolutions qui n'ont pas fini de bouleverser cette discipline.

45 € TTC
ISBN : 978-2-287-99666-5
9 782287 996665
springer.com

Pratique du calcul bayésien est né de l'expérience acquise lors des cours donnés en sciences de l'enseignement, tant à l'université de Liège (Jefon), qu'à la grande école AgroparTech (Paris). Son fil conducteur peut se résumer par la locution « de la plume à la souris », tournure empruntée à un opacologue marquant le rôle d'une école fréquentée jadis par le premier auteur. La première partie privilégie les modèles statistiques paramétriques calculables « à la plume » et cependant très riches, tant du point de vue de la présentation des concepts fondateurs du paradigme bayésien, que de leurs applications opérationnelles, notamment en matière d'aide à la décision. Dès le premier chapitre, la représentation du modèle par un graphique cyclique orienté permet de distinguer clairement la phase où la créativité du chercheur s'exprime de celle où il calcule. À cette fin, le logiciel libre WINNICO[®] sera très utile à l'apprenti modélisateur.

La seconde partie présente des applications réelles, plus sophistiquées, qui nécessitent souvent d'introduire une couche de variables latentes entre les observables et les paramètres. Conclure une inférence bayésienne sur ces modèles hiérarchiques implique un mouas intensif aux méthodes modernes de calcul et mobilise donc « la souris » de l'ordinateur.

Cet ouvrage est dédié aux étudiants et chercheurs qui souhaitent apprendre le calcul bayésien avec des visées opérationnelles. Le lecteur est invité à l'utiliser comme un tremplin lui permettant d'aller au-delà que son intérêt étou ses besoins l'exigent. C'est pourquoi, les treize chapitres offrent un compromis entre la rigueur du langage mathématique et la souplesse de la langue de Molière. Le côté opérationnel est mis en avant. De nombreux exemples, le plus souvent réels, justifient les efforts et illustrent les raisonnements sous-jacents. Les développements théoriques sont donc volontairement limités à l'essentiel et le lecteur désireux de les poursuivre trouvera deux ouvrages de référence publiés dans la même collection.

Collection
Statistique
et probabilités
appliquées

J.-J. Boreux, É. Parent, J. Bernier

Pratique du calcul bayésien

Jean-Jacques Boreux,
Éric Parent, Jacques Bernier

Pratique du calcul bayésien



Springer

